GOOL
בשביל התירגול

לוגיקה מתמטית

פרק 3 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשמו ב- $\square$ את הסימן המתאים, $\not\subseteq,\subset,\subseteq,\notin,\in$.
שימו לב שתיתכן יותר מתשובה אחת. אם התשובה היא $\not\subseteq$, נמקו.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$
ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$
ג. $\{8,\varnothing\}\ \square\ \{1,2,8\}$
ד. $\varnothing\ \square\ \{1,2\}$
ה. $\varnothing\ \square\ \{\varnothing,1,2\}$
ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$
ז. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\}\}$
ח. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
ט. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$
י. $\{\{2\},\varnothing\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$
יא. $\varnothing\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$
יב. $\{\varnothing\}\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$
יג. $\{1,2\}\ \square\ \{1,\{2\}\}$
יד. $1\ \square\ \mathbb{N}$
טו. $\{1\}\ \square\ \mathbb{N}$
טז. $1\ \square\ \{\mathbb{N}\}$
יז. $\{1\}\ \square\ \{\mathbb{N}\}$

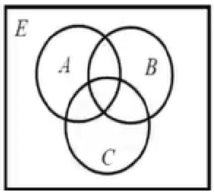
תשובות סופיות

1)
א. $\in$
ב. $\in,\subseteq,\subset$
ג. $\notin,\not\subseteq$
ד. $\notin,\subseteq,\subset$
ה. $\in,\subseteq,\subset$
ו. $\notin,\not\subseteq$
ז. $\notin,\subseteq,\subset$
ח. $\in,\subseteq,\subset$
ט. $\in,\subseteq,\subset$
י. $\notin,\not\subseteq$
יא. $\notin,\subseteq,\subset$
יב. $\in,\not\subseteq$
יג. $\notin,\not\subseteq$
יד. $\in,\notin$
טו. $\notin,\subseteq,\subset$
טז. $\notin$
יז. $\notin,\not\subseteq$

דיאגרמת ון

שאלות

1) באיור שלהלן דיאגרמת ון.



קווקוו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

א. $(A-B)-C$

ב. $A-(B-C)$

ג. $A\cap B^c$

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$

ה. $(A\cap B)\cap C$

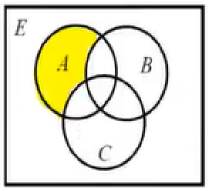
ו. $A\cap(B\cap C)$

ז. $(A\cup B)\cup C$

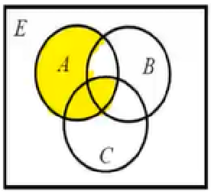
ח. $A\cup(B\cup C)$

תשובות סופיות

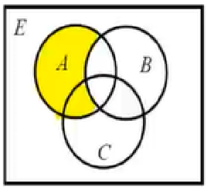
1) א.



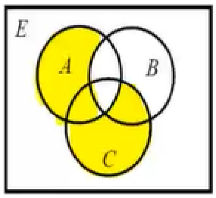
ב.



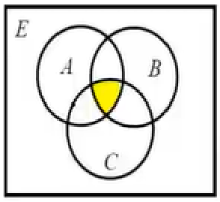
ג.



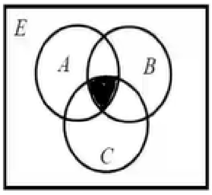
ד.



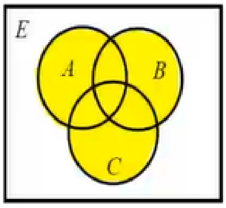
ה.



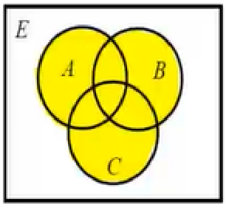
ו.



ז.



ח.



פעולות על קבוצות

שאלות

1) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$

ב. $(A\cap B)\cup C$

ג. $A\cap(B\cup C)$

ד. $P(A)$

ה. $C\setminus A$

2) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$:

א. האם $B\subseteq C$?

ב. האם $\{1\}\subseteq B$?

ג. האם $\{1\}\subseteq A$?

ד. האם $\{1\}\in P(A)$?

ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$?

ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$?

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$?

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\},B=\{4,\varnothing\}$, חשבו:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $A-B$

ד. $B-A$

ה. $A\oplus B$

תשובות סופיות

1) א. $\{1,2,6\}$ ב. $\{1,3,4,6\}$ ג. $\{1,3\}$ ד. $2\notin P(A)$

2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.
ה. לא. ו. כן. ז. כן.

3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$ ב. $\{\varnothing\}$ ג. $\{1,\{3,*\}\}$ ד. $\{4\}$
ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

שאלות הוכחה

שאלות

בכל אחת משאלות הפרק יש לפעול כפי שמתואר בשאלה 1.

1) תהיינה A, B קבוצות.

אם הטענה נכונה, ציינו זאת ותנו נימוק קצר מדוע.
אם הטענה אינה נכונה, ציינו זאת, ותנו דוגמה נגדית.
יש ערך רב יותר לדוגמה מינימלית; בדקו האם בדוגמה הנגדית יש פרטים מיותרים והסירו אותם.
אם טענות יב-כא נכונות, נסו להוכיחן, ובמיוחד את טענה יב, שבה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cup B$.

ב. אם $x \notin A \cup B$, אז $x \notin A$.

ג. אם $x \notin A$, אז $x \notin A \cap B$.

ד. אם $x \notin A \cap B$, אז $x \notin A$.

ה. אם $x \notin A$, אז $x \notin A - B$.

ו. אם $x \notin A - B$, אז $x \notin A$.

ז. אם $x \in B$, אז $x \notin A - B$.

ח. אם $x \notin A - B$, אז $x \in B$.

ט. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$

י. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \in B$

יא. השלימו: $x \notin A - B \Leftrightarrow$ ______.

יב. $A \subseteq B \cap C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

יג. $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

יד. אם $A = A \cup B$, אז $A \subseteq B$.

טו. אם $A = A \cup B$, אז $B \subseteq A$.

טז. אם $A = A \cap B$, אז $A \subseteq B$.

יז. אם $A = A \cap B$, אז $B \subseteq A$.

יח. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cup B$.

יט. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cup B$.

כ. אם $A \subseteq B$, אז $A = A \cap B$.

כא. אם $B \subseteq A$, אז $A = A \cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם $A=A-B$, אז $B=\varnothing$.
ב. אם $A=A-B$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ג. אם $A=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.
ד. אם $B=A\cup B$, אז $A\cap B=B$.
ה. אם $A\cap B=A$, אז $A=A\cup B$.
ו. אם $A\cap B=B$, אז $A=A\cup B$.
ז. אם $A\cup B=A\cup C$ וגם $A\cap B=A\cap C$ אז $B=C$.
ח. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-C$
ט. $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(A\cup C)$
י. $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$
יא. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
יב. $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
יג. $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$
יד. להלן שתי טענות. הוכיחו את הנכונה והפריכו את השגויה:
1. $A\cap B\cap C\subseteq A\oplus B\oplus C$
2. $A\oplus B\oplus C\subseteq A\cap B\cap C$

תשובות סופיות

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x\in B\ V\ x\notin A$ יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.1. נכונה. 2. לא נכונה.

דרך השלילה

שאלות

הוכיחו כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α, אז β, נוכיח אם $\neg\beta$, אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$, אז $A\cap C=\varnothing$
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$, אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$, אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$, אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$, אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$, אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה

שאלות

1) עבור $A=\{3,\{\varnothing\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$
רשמו את הקבוצות הבאות:
א. את $P(C)$, $P(B)$ ואת $P(A)$.
ב. $P(A)\cap B$, $P(A)\cap A$, $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$,
א. רשמו את $P(A)$ ואת $P(B)$.
ב. רשמו את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.
ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשמו את $P(\varnothing)$, את $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכיחו או הפריכו:
א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$
ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$
ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$
ה. $P(A)\cap A=\varnothing$
ו. תנו דוגמה לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.
ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$, אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכיחו בדרך השלילה:
ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$, אז $A\cap B=\varnothing$.
ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן, ונתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכיחו כי $B-A=B$.

תשובות סופיות

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראו סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

קריאת קבוצות

שאלות

1) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, רשמו בשתי דרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים, $\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,...\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי, $A=\{1,4,9,16,25,36,49,...\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי,
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,...\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים,
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},...\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2,
$D=\{2^1,2^2,2^3,...\}=\{2,4,8,16,32,...\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\}$

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 2\to x^2>41\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 7\to x<20\}$

ד. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1 \mid \sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq 8\to x^2<67\}$

תשובות סופיות

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$

מכפלה קרטזית

שאלות

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$, אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכיחו כי לכל ארבע קבוצות A,B,C,D מתקיים
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

2) הוכיחו או הפריכו:
תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$.
אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$, כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכיחו או הפריכו:
קיימות שתי קבוצות A,B, כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$ (סימון $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכיחו או הפריכו:
לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגימו שלוש קבוצות A,B,C, כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראו סרטון.